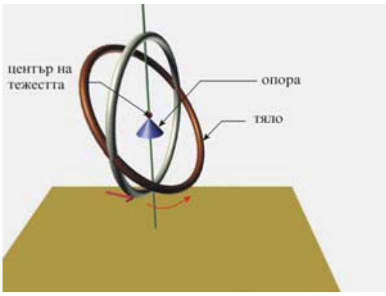
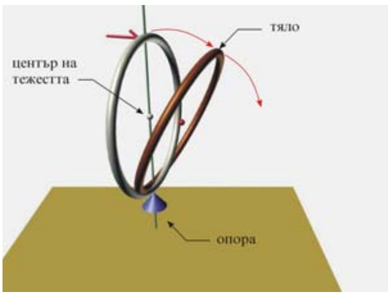
4. ЦЕНТЪР НА ТЕЖЕСТТА

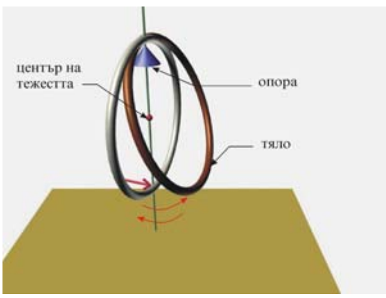
Дори и да не влиза във взаимодействие с други тела, върху всяко материално тяло, намиращо се в гравитационно поле, действа силата на собственото му тегло. За да бъде в равновесие, тялото трябва да бъде подпряно в една или повече точки. Точката, в която тялото трябва да бъде подпряно така, че да се намира в безразлично равновесие, се нарича ***център на тежестта*** (фиг.1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Едно тяло се намира в безразлично равновесие, ако при малко отклонение то придобива нова форма на устойчиво равновесие и за да се върне към изходното положение, към него трябва да бъде приложено отклоняващо въздействие с обратна посока.

Тук ще направя едно уточнение, тъй като в ежедневието често като мярка за теглото се използва *kg* (килограм). До голяма степен причината за това са търговските и битовите пружинни кантари, които мерят и показват масата на телата (предполага се, че сте наясно с термина "маса") посредством силата на тежестта. Когато някой каже "отслабнах два килограма", най-вероятно има предвид, че масата на тялото му е намаляла с два килограма. Тъй като това обаче се установява качвайки се на медицинска везна, която измерва силата на тежестта, мярката неволно се пренася и върху нея. Трябва да се помни, че щом е сила, теглото се мери в *N* (нютони). Поне тук от вас ще се очаква да постъпвате така. Освен към масата на тялото, силата на тежестта има отношение и към земното ускорение, поради което ще бъде разгледана по-подробно в раздела "Динамика" (номер 32 от списъка на учебните модули).

Ако тялото бъде подпряно по-ниско, то ще се намира в неустойчиво равновесие (фиг.2).

Едно тяло се намира в неустойчиво равновесие, ако при малко отклонение то се стреми да продължи да се движи в посока на отклонението и след премахване на отклоняващото въздействие не се връща в изходното равновесно положение.

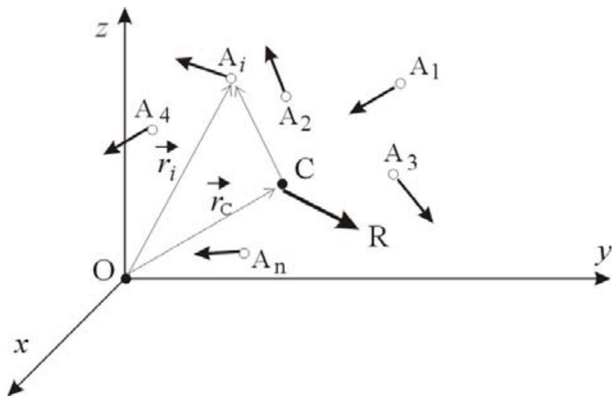
Ако бъде подпряно по-високо от центъра на тежестта, ще бъде в устойчиво равновесие (фиг.3). Свойствата на тази точка играят важна роля при анализа на равновесното състояние на материалното тяло.

Едно тяло се намира в устойчиво равновесие, ако при малко отклонение то се стреми да се върне към равновесното си състояние и се връща към него след премахване на отклоняващото въздействие.

Тъй като материалното тяло обикновено се разглежда като съставено от много материални частички, теглото му също се разглежда като сума от силите на теглото на тези частички. В настоящото изложение силата на теглото на материална частичка с маса *m*, намираща се в земното гравитационно поле, се разглежда като вертикална сила с големина *G=mg*, насочена надолу, към центъра на Земята (влиянието на центробежната сила, породена от въртенето на земята се пренебрегва). Силите на теглата на материалните частички, изграждащи тялото, образуват система еднопосочни успоредни сили. Така задачата за определяне на центъра на тежестта на материално тяло се свежда до задача за намиране на равнодействащата на система успоредни сили.

Моментова теорема на Вариньон

При редукцията на система от успоредни сили се използва теоремата на Вариньон, която гласи, че ако дадена система сили има равнодействаща *R*, главният мамент M_{sys} на системата спрямо произволна точка О е равен на момента M_R на равнодействащата спрямо същата точка.



Фиг. 4

Доказателство:

Нека предположим, че системата се състои от *n* на брой сили P_i (i = 1,2…n) и има равнодействаща *R*, приложена в т.С (фиг.4). Моментът M_{sys} на системата спрямо т.О може да се представи като сума от моментите на всички сили по следния начин:

$$\vec{M}_{sys} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{P}_i \qquad (1)$$

Радиус-векторът $\vec{r}_i$ на приложната точка на *i*–тата сила може да се представи като сума от два вектора, единият от които е радиус-векторът на т.С:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \overrightarrow{CA_i} . \qquad (2)$$

Като заместим изразът от (2) в уравнение (1), получаваме

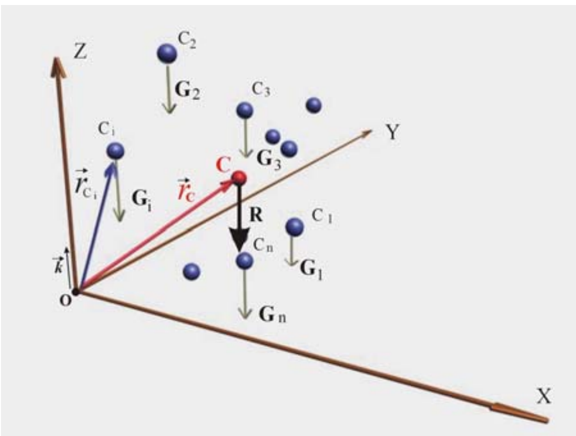
$$\vec{M}_{sys} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_C + CA_i) \times \vec{P}_i = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i + \sum_{i=1}^{n} CA_i \times \vec{P}_i . \qquad (3)$$

Първото събираемо в дясната страна на равенство (3) е моментът M_R на равнодействащата $R = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$. Второто събираемо е моментът на системата спрямо т.О и според определението за равнодействаща е равно на нула. Така уравнение (3) добива вида

$$\vec{M}_{sys} = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \vec{M}_R , \qquad (4)$$

което и трябваше да се докаже.

Център на тежестта на система материални точки



Фиг. 5

Нека да разгледаме система от *n* материални точки C_i, които са неподвижни и се намират в гравитационно поле (фиг.5). Теглата G_i на материалните точки представляват система от успоредни сили, които могат да бъдат представени като

$$\vec{G}_i = \vec{k} G_i , \qquad (5)$$

където $\vec{k}$ е единичен вектор по направление на силите. Системата има равнодействаща (на фиг.5 тя е означена като *R*, а в текста като *G*), големината на която можем да определим като съберем силите. Това лесно може да се направи, тъй като силите са успоредни:

$$\vec{G} = \vec{k} G = \vec{k} \sum_{i=1}^{n} G_i . \qquad (6)$$

Приложната точка на равнодействащата е геометрична точка (може да не съвпадне с никоя от материалните точки). На фиг.5 тази точка е означена като т.С. Ако в т.С приложим нова сила *P*, противоположна на равнодействащата, то системата от материални точки ще бъде в безразлично равновесие ($P+G=0$). Това означава, че т.С е център на тежестта на системата. Да си поставим за цел да намерим местоположението на тази точка.

При направените предпоставки уравнение (4) добива следния вид:

Моментът на равнодействащата (лявата страна на равенството) е равен на сумата от моментите на отделните сили (дясната страна на равенството):

$$\vec{r}_C \times \vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{G}_i . \qquad (7)$$

Заместваме **G** и G_i според (5) и (6) и получаваме:

$$\vec{r}_C \times \vec{k}G = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{k}G_i . \qquad (8)$$

В лявата страна на уравнение (8) **G** е скалар и може да бъде множител на който и да е от двата вектора, така че го преместваме при r_c:

$$\vec{r}_C \times \vec{k}G = G\vec{r}_C \times \vec{k} . \qquad (9)$$

В дясната страна на уравнение (8) k не зависи от брояча на сумата и може да бъде изведен извън нея:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{k}G_i = \left(\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i \right) \times \vec{k} . \qquad (10)$$

Така уравнение (8) добива вида $G\vec{r}_C \times \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i \right) \times \vec{k}$.

За да е изпълнено това равенство, трябва множителите пред k в лявата и дясната страна също да са равни: $G\vec{r}_C = \left(\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i \right)$, откъдето получаваме радиус-вектора на приложната точка на равнодействащата **G**, която е и търсеният център на тежестта: $\vec{r}_C = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} G_i \vec{r}_i \right)}{G}$.

На практика по-често се налага местоположението на т.С да бъде определено в една правоъгълна координатна система с помощта на координатите x_c, y_c и z_c:

$$x_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} G_i x_i \right)}{G}, \quad y_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} G_i y_i \right)}{G}, \quad z_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} G_i z_i \right)}{G} . \qquad (11)$$

Теглата на материалните точки могат да се представят като

$$G_i = m_i g \quad \text{и} \quad G = \sum_{i=1}^{n} m_i g = g \sum_{i=1}^{n} m_i = M\, g , \qquad (12)$$

където *g* е гравитационното ускорение, а *M* е пълната маса на системата от материални точки. Опитайте се сами да заместите изразите (12) в уравнение (11), да изнесете *g* като общ множител в числителя и знаменателя и да го съкратите.

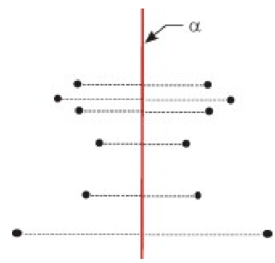
За т.*C* би трябвало да получите:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i}{M} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i}{M} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i}{M} \,, \qquad (13)$$

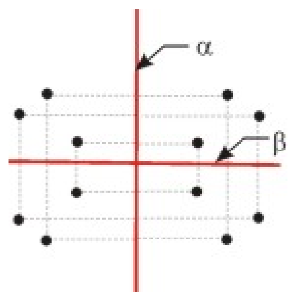
поради което тя се нарича още и “масов център” на системата.

Основни свойства

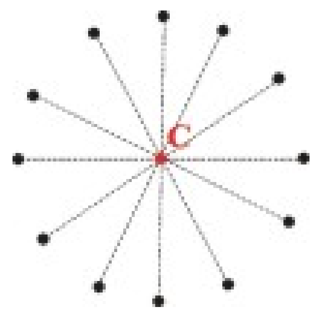
Ако материалните точки са разположени симетрично спрямо дадена равнина α, т.C лежи в тази равнина.



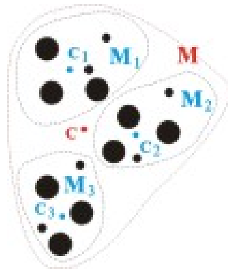
Ако материалните точки са разположени симетрично спрямо две равнини α и β, т.C лежи на пресечната права на тези равнини Така се определя центърът на тежестта на правоъгълник.



Ако материалните точки имат център на симетрия, той е и център на тежестта. Така се определя центърът на тежестта на кръг.

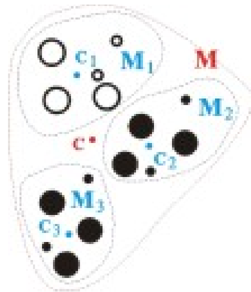


Ако материалните точки са разделени на подсистеми (например три броя), за общия център на тежестта важи правилото



$$Mr_c = M_1 r_{c1} + M_2 r_{c2} + M_3 r_{c3} .$$

Ако от системата отделим дадена подсистема (например от M да отделим M_1), за общия център на тежестта на останалата част C_{23} важи правилото



$$r_{c23} = \frac{Mr_c - M_1 r_{c1}}{M - M_1} .$$

Центърът на тежестта на две материални точки лежи на отсечката, която ги съединява.

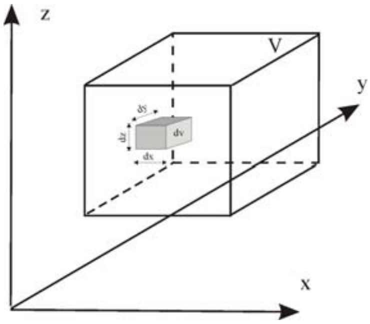
По-големият диаметър на лявата точка предполага по-голяма маса, затова и т.C е по-близо до нея.

Масов център на непрекъснати материални системи

Непрекъснатите материални системи се състоят от материални точки, плътно допрени една до друга, без празнини. Това са материални линии, материални повърхнини (плочи) и материални обеми (материални тела).

За система от материални точки масовият център т.*C* се определя от уравненията (13). В практиката обаче по-често се налага да бъде намиран центърът на тежестта на масивни тела и плочи.

Един материален обем V може да бъде разглеждан като съвкупност от материални точки, така че и за неговия център на тежестта ще важат същите уравнения (13), както за система от материални точки. Разликата е тази, че при материалния обем точките са плътно наредени една до друга и образуват непрекъсната среда. Поради тази причина сумите от уравненията на дискретната система ще бъдат заменени с интеграли за непрекъснатата материална система по следния начин:



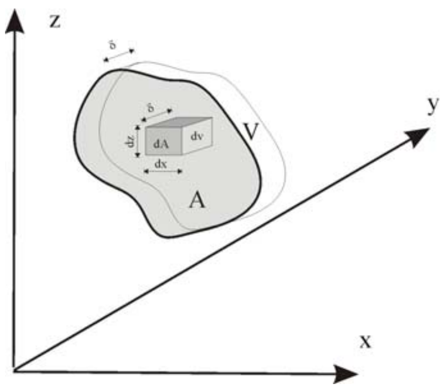
Фиг. 6

Ако координатите на един елементарен обем *dv=dx.dy.dz* означим с X, Y, Z, както е показано на фиг.6, а елементарната маса на този обем представим като d*m*=r.*dv*, за масовия център ще получим

$$x_c = \frac{\int_V X\ \rho\, dv}{\int_V \rho\, dv}\ , \quad y_c = \frac{\int_V Y\, \rho\, dv}{\int_V \rho\, dv} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{\int_V Z\ \rho\, dv}{\int_V \rho\, dv}\ .$$

При хомогенен материален обем масовата плътност е постоянна - ρ=const. Можем да я съкратим в числителя и знаменателя. Така се получава:

$$x_c = \frac{\int_V X\ dv}{\mathrm{V}}\ , \quad y_c = \frac{\int_V Y\ dv}{V} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{\int_V Z\ dv}{V}\ .$$



Фиг. 7

Ако тялото има постоянна дебелина □ по едно от координатните направления (например y), то може да се моделира като плоча, както е показано на фиг.7. Така на определяне подлежат само координатите на масовия център по другите две направления

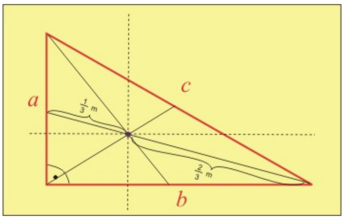
$$x_c = \frac{\int_A X\ \delta\ dA}{\delta\ \mathrm{A}}\ , \quad z_c = \frac{\int_A Z\ \delta\ dA}{\delta\ A}$$

или след като съкратим δ:

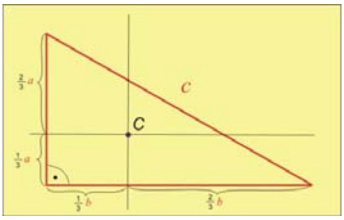
$$x_c = \frac{\int_A X\ \ dA}{\mathrm{A}}\ , \quad z_c = \frac{\int_A Z\ dA}{A}\ .$$

Запомнете тези две уравнения. В някои от следващите модули те ще имат известна методична роля, като служат за основа при извеждане на други уравнения, засягащи разглежданата там тема.

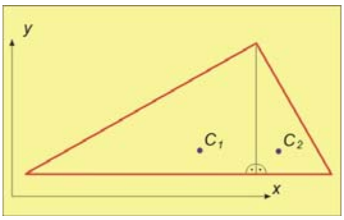
На практика за определяне на центъра на тежестта се използват готови таблици на най-често срещаните равнинни фигури.



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Всепак добре е местоположението на центъра на тежестта за някои прости и често използвани геометрични фигури да се помни, което би спестило времето за работа със справочната литература. За този курс такава фигура е правоъгълният триъгълник (фиг.8). В средния курс по математика се учи, че центъра на тежестта е в пресечната точка на медианите. Това правило обаче често не е удобно за прилагане, особено когато координатните оси са успоредни на катетите на триъгълника. По-удобно е да се работи с правилото, че по направленията, успоредни на катетите, центърът на тежестта отстои от правия ъгъл на разстояние 1/3 от дължината на всеки катет (центърът на тежестта се намира на 1/3 от катетите), както е показано на фиг. 9.

При произволен триъгълник, ако има страна, успоредна на една от координатните оси, по-удобно е да спуснем височината към тази страна и да работим с двата новополучени триъгълника (фиг.10). Така работата се удвоява като количество - от един се получават два центъра на тежестта, но и се опростява - координатите на двата центъра се намират лесно. Сумарният ефект от разделянето обикновено се оказва положителен.